Λύσεις επιλεγμένων ασκήσεων

Άσκηση 72
Σελ. 152

Έστω $n_0, n_1, \ldots, n_9$ μία τυχαία διάταξη των αριθμών $1, 2, \ldots, 10$ στην περιφέρεια ενός κύκλου. Για $i = 0, 1, \ldots, 9$ ορίζουμε

$$a_i = n_i + n_{i+1} + n_{i+2},$$

όπου τα $i+1$ και $i+2$ είναι mod 10 (π.χ. $n_{8+2} = n_0$). Παρατηρούμε ότι κάθε ένας από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 10$ εμφανίζεται σε 3 διαφορετικά αθροίσματα a_i. Π.χ. αν $n_3 = 4$, τότε ο αριθμός 4 έχει αθροιστεί στα a_1, a_2, a_3. Επομένως,

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_9 = 3(1 + 2 + \cdots + 10) = 3 \cdot 55 = 165.$$

Σύμφωνα με την άσκηση 71, υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ τέτοιο ώστε

$$a_k \geq \frac{165}{10} = 16.5.$$

Επειδή a_k ακέραιος συμπεραίνουμε ότι $a_k \geq 17$.

Άσκηση 6
Σελ. 419

Υπολογίζοντας ορισμένα αθροίσματα, εικάζουμε ότι το άθροισμα με n όρους είναι ίσο με $n/(n+1)$. Αποδεικνύουμε με επαγωγή.

Βάση. Για $n = 1$ υπάρχει μόνο ένας όρος, το $1/2$.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}. \tag{1}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση (1) βλέπουμε ότι η αριστερή πλευρά είναι ίση με (αντικαθιστούμε τους πρώτους k όρους με $\frac{k}{k+1}$)

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Άσκηση 16
Σελ. 444

Με επαγωγή στο n.

Βάση. Για $n = 1$ έχουμε $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0 = f_1 - 1$.

Επαγωγικό Βήμα. Έστω ότι

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1. \tag{2}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} = f_{2(n+1)-1} - 1.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_0 - f_1 + f_2 &- \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} \\
&= f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2} && \text{από (2)} \\
&= f_{2n-1} - 1 + f_{2n} && \text{από ορισμό } f_{2n+2} \\
&= f_{2n+1} - 1 && \text{από ορισμό } f_{2n+1}
\end{aligned}$$

όπως έπρεπε να δείξουμε.

Άσκηση 14
Σελ. 538

Από των ορισμό του διωνύμου

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}. \\ &= \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Άρα για $k = 1, 2, \ldots, n$ ισχύει

$$\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}. \tag{3}$$

Έχουμε ότι

$$\frac{k}{n-k+1} < 1, \quad \text{όταν } k \leq n/2$$

και

$$\frac{k}{n-k+1} > 1, \quad \text{όταν } k > n/2.$$

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}, \quad \text{όταν } k \leq n/2$$

και

$$\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k}, \quad \text{όταν } k > n/2.$$

Τα παραπάνω αποδεικνύουν όλες τις ανισότητες της άσκησης. Για την ισότητα, παρατηρούμε ότι

$$\lceil n/2 \rceil = n - \lfloor n/2 \rfloor$$

και το ζητούμενο ισχύει λόγω του Λήμματος 1 στη σελίδα 523 του βιβλίου.

Άσκηση 28
Σελ. 582

Μπορούμε να σκεφτούμε με δύο τρόπους.

Ο ένας τρόπος είναι να υποθέσουμε ότι οι 11 αριθμοί έχουν επιλεγεί, και να υπολογίσουμε την πιθανότητα του παίκτη να κερδίσει επιλέγοντας 7 τυχαίους αριθμούς. Οι 7-άδες που κερδίζουν είναι όσες μπορούν να σχηματιστούν από τους 11 αριθμούς του λαχνού. Είναι $\binom{11}{7}$ το πλήθος. Αφού ο συνολικός αριθμός 7-άδων που μπορεί να επιλέξει ο παίκτης από τους 80 αριθμούς είναι $\binom{80}{7}$, η πιθανότητα να κερδίσει είναι

$$\frac{\binom{11}{7}}{\binom{80}{7}}.$$

Ο δεύτερος τρόπος είναι να υποθέσουμε ότι ο παίκτης έχει επιλέξει 7 αριθμούς, και στη συνέχεια επιλέγονται τυχαία 11 αριθμοί από τους 80. Για να κερδίσει ο παίκτης, θα πρέπει αυτοί οι 11 να περιέχουν τους 7 που επέλεξε. Οι 11-άδες με την ιδιότητα αυτή, είναι τόσες όσοι οι τρόποι να επιλέξουμε 4 αριθμούς από τους 73 που δεν επέλεξε ο παίκτης, δηλαδή $\binom{73}{4}$. Αφού ο συνολικός αριθμός 11-άδων είναι $\binom{80}{11}$, η πιθανότητα να κερδίσει είναι

$$\frac{\binom{73}{4}}{\binom{80}{11}}.$$

Φυσικά,

$$\frac{\binom{11}{7}}{\binom{80}{7}} = \frac{\binom{73}{4}}{\binom{80}{11}}.$$

Άσκηση 16
Σελ. 605

Πρέπει να δείξουμε ότι $p(\bar{E} \cap \bar{F}) = p(\bar{E}) \cdot p(\bar{F})$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
p(\bar{E} \cap \bar{F}) &= p(\overline{E \cup F}) && \text{De Morgan} \\
&= 1 - p(E \cup F) && \text{Θεώρημα 1, σελίδα 578} \\
&= 1 - p(E) - p(F) + p(E \cap F) && \text{Θεώρημα 2, σελίδα 579} \\
&= 1 - p(E) - p(F) + p(E) \cdot p(F) && \text{από ανεξαρτησία } E, F \\
&= (1 - p(E)) \cdot (1 - p(F)) \\
&= p(\bar{E}) \cdot p(\bar{F}). && \text{Θεώρημα 1, σελίδα 578}
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την άσκηση 17. Αφού τα E, F είναι ανεξάρτητα, η άσκηση 17 δίνει ότι τα $\bar{E}, F$ είναι ανεξάρτητα. Άλλη μία εφαρμογή της άσκησης (στα $\bar{E}$ και F αυτή τη φορά, και παίρνοντας το συμπλήρωμα του F), δίνει ότι τα $\bar{E}, \bar{F}$ είναι ανεξάρτητα.