Τυχαίες Μεταβλητές και Μέσες Τιμές

Τυχαίες Μεταβλητές

Ορ. Μια τυχαία μεταβλητή επί ενός πιθανοτικού χώρου (Δ, p) είναι μια συνάρτηση $X : \Delta \to \mathbb{R}$.

Για οποιοδήποτε στοιχείο $v \in \Delta$ μπορούμε να ορίσουμε το γεγονός $X = v$. Το γεγονός αυτό ορίζεται ώστε να ισχύει:

$$p(X = v) = \sum_{x \in \Delta : X(x) = v} p(x)$$

δηλαδή είναι το σύνολο όλων των $x \in \Delta$ έτσι ώστε $X(x) = v$.
Σημείωση: για κάθε δειγματικό χώρο που ισχύει ότι $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε τη τυχαία μεταβλητή X με $\forall x \in \Delta : X(x) = x$. Σε αυτήν την περίπτωση προφανώς $p(X = v) = p(v)$.

Παράδειγμα

Π.χ. Στο πείραμα ρίψης δύο ζαριών ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X που δίνει το άθροισμα των αριθμών που αντιστοιχούν στις όψεις των δύο ζαριών.
Να βρεθεί η πιθανότητα $p(X = 7)$.

Χρήση Τυχαίων Μεταβλητών

Οι τυχαίες μεταβλητές έχουν πραγματικές τιμές. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε διάφορα γεγονότα χρησιμοποιώντας σχέσεις μεταξύ πραγματικών.

Π.χ. $p(X \leq b)$, $p(X \geq a)$, $p(a \leq X \leq b)$, $p(X^2 \neq 1)$ κ.ο.κ.

Έτσι μια τυχαία μεταβλητή 'μεταφράζει' την έκβαση ενός πειράματος σε μία πραγματική ποσότητα που μπορεί να μετρηθεί.

Σημείωση: Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και X τ.μ. επί του πιθανοτικού χώρου (p, Δ) τότε ιχύει επίσης ότι $f \circ X = f(X)$ είναι τ.μ. επί του (p, Δ).

Μέση Τιμή Τυχαίας Μεταβλητής

Ορ. Έστω τ.μ. X επί πιθανοτικού χώρου (p, Δ). Ορίζουμε την μέση τιμή της X ως εξής

$$\sum_{x \in \Delta} X(x) \cdot p(x)$$

Διαίσθηση: η τιμή $E[X]$ αντιστοιχεί με τη 'μέση τιμή' της τυχαίας μεταβλητής μετά από μεγάλο αριθμό μετρήσεων.

Προσοχή: Δεν είναι η πιό πιθανή τιμή της τ.μ. Στην πραγματικότητα η τ.μ. μπορεί ποτέ να μην παίρνει την τιμή $E[X]$! (π.χ. το 2008 η μέση Ελληνίδα έχει 1.36 παιδιά). Η τιμή $E[X]$ είναι αντιπροσωπευτική για την X.

Παράδειγμα

Π.χ. Στο πείραμα ρίψης δύο ζαριών ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X που δίνει το άθροισμα των αριθμών που αντιστοιχούν στις όψεις των δύο ζαριών.
Να βρεθεί η μέση τιμή $E[X]$.

Ιδιότητες

Λήμμ. Για τ.μ. X επί του (p, Δ) ισχύει:

$$E[X] = \sum_{r \in X(\Delta)} r \cdot p(X = r)$$

Απόδ. Έυκολη από τον ορισμό του $E[X]$. $\square$

Ιδιότητες

Λήμμ. (Γραμμικότητα Μέσης Τιμής). Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές επί του (p, Δ). Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$E[aX + bY] = a \cdot E[X] + b \cdot E[Y]$$

Απόδ. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό. $\square$

Προσοχή: Γενικά δεν ισχύει $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.
Παράδειγμα: επί του δειγματικού χώρου $\Delta = \{0, 1\}$ με $p(\cdot) = 1/2$ ορίζουμε $X(0) = 2$ και $X(1) = 1/2$ ενώ $Y(0) = 1/2$ και $Y(1) = 2$. Ισχύει ότι $E[X \cdot Y] = E[1] = 1$, ενώ:

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.25 \quad E[Y] = 1.25$$

Δεσμευμένες Μέσες Τιμές

Ορ. Εστω γεγονός A. Ορίζουμε

$$E[X \mid A] = \sum_{r \in X(\Delta)} r \cdot p(X = r \mid A)$$

Π.χ. Στο πείραμα ρίψης δύο ζαριών ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X που δίνει το άθροισμα των αριθμών που αντιστοιχούν στις όψεις των δύο ζαριών.
Να βρεθεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X \mid A]$ όπου A είναι το γεγονός ότι ήρθαν διπλές ζαριές (ντόρτια κ.λ.π.).

Ιδιότητες

Θεώρ. (Θεώρημα Ολικής Μέσης Τιμής). Έστω γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ με $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Delta$ που είναι ασυμβίβαστα ανα δύο, δηλ.

$$\forall i, j : (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$$

Έχουμε ότι

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X \mid A_i] \cdot p(A_i)$$

Ιδιότητες

Απόδ. Η τιμή $E[X]$ είναι ίση με:

$$\sum_{r \in X(\Delta)} r \cdot p(X = r)$$

$$\sum_{r \in X(\Delta)} r \cdot \sum_{i=1}^{n} p(X = r \mid A_i) \cdot p(A_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r \in X(\Delta)} r \cdot p(X = r \mid A_i) \cdot p(A_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \sum_{r \in X(\Delta)} r \cdot p(X = r \mid A_i)$$

□

Ανεξάρτητες Τ.Μ.

Ορ. Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες όταν για κάθε $r, s \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι τα γεγονότα $X = r$ και $Y = s$ είναι ανεξάρτητα.

Θεώρ. Για δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y που είναι ανεξάρτητες ισχύει $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.

Απόδ. Έχουμε ότι
$E[X \cdot Y] = \sum_{r \in Y(\Delta)} E[X \cdot Y \mid Y = r] \cdot p(Y = r)$.
Τώρα : $E[X \cdot Y \mid Y = r] = E[r \cdot X \mid Y = r] = r \cdot E[X \mid Y = r]$.
Απο ανεξαρτησία: $E[X \mid Y = r] = E[X]$. Οπότε

$$E[X \cdot Y] = \sum_{r \in Y(\Delta)} r \cdot E[X] \cdot p(Y = r) = E[X] \cdot E[Y]$$

□

Παράδειγμα

Π.χ. Έστω ρίψη δύο ζαριών και X, Y οι τ.μ. που αντιστοιχούν στο αριθμητικό αποτέλεσμα των δύο ρίψεων. Υπολογίστε το $E[X \cdot Y]$.

Ενδεικτικές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορ. Έστω γεγονός A επί του (p, Δ). Η ενδεικτική τ.μ. του A παίρνει τιμές στο $\{0, 1\}$ και ορίζεται σαν $X(x) = 1$ ανν $x \in A$.

Λήμμ. Έστω X ενδεικτική τ.μ. του γεγονότος A. Ισχύει ότι:

$$E[X] = p(A)$$

Απόδ. Εύκολη από τον ορισμό. $\square$

Άσκηση

Άσκ. Έστω n κυνηγοί σε μία σειρα και n λαγοί απέναντι τους. Κατόπιν παραγγέλματος κάθε κυνηγός διαλέγει ένα λαγό στην τύχη και πυροβολεί (χωρίς συνεργασία). Έστω X η τ.μ. που ισούται με το ποσοστό των επιζώντων λαγών. Να βρεθεί η $E[X]$. (Θεωρούμε ότι οι κυνηγοί πετυχαίνουν πάντοτε το λαγό που επιλέγουν και οτι οι λαγοί δεν έχουν σπουδαίες διαφορές).

Υπόδειξη. Ορίστε X_i σαν ενδεικτική τ.μ. του γεγονότος 'Ο i-οστος λαγός επιβιώνει.' Με εφαρμογή της γραμμικότητας του $E[\cdot]$ ολοκληρώνουμε τον υπολογισμό.

Άσκηση

Άσκ. Έστω n κυνηγοί σε μία σειρα και n λαγοί απέναντι τους. Κατόπιν παραγγέλματος κάθε κυνηγός διαλέγει ένα λαγό στην τύχη και πυροβολεί (χωρίς συνεργασία). Έστω X η τ.μ. που ισούται με το ποσοστό των επιζώντων λαγών. Να βρεθεί η $E[X]$. (Θεωρούμε ότι οι κυνηγοί πετυχαίνουν πάντοτε το λαγό που επιλέγουν και οτι οι λαγοί δεν έχουν σπουδαίες διαφορές).

Υπόδειξη. Ορίστε X_i σαν ενδεικτική τ.μ. του γεγονότος 'Ο i-οστος λαγός επιβιώνει.' Με εφαρμογή της γραμμικότητας του $E[\cdot]$ ολοκληρώνουμε τον υπολογισμό.

$$E[X] = (1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} \approx 36.7\%$$

Ανισότητα του **Markov**

Θεώρ. Αν η τ.μ. X είναι μη αρνητική ισχύει οτι για κάθε $t > 0$,

$$p(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$$

Απόδ. (στα παρακάτω αθροίσματα ισχύει πάντα $r \in X(\Delta)$).
Ισχύει ότι $p(X \geq t) = \sum_{r \geq t} p(X = r)$
Παρατηρούμε ότι : $E[X] = \sum_r r \cdot p(X = r) \geq \sum_{r \geq t} r \cdot p(X = r)$
Αυτό σημαίνει ότι $E[X] \geq t \cdot \sum_{r \geq t} p(X = r) = t \cdot p(X \geq t)$. $\square$

Παράδειγμα

Π.χ. Στο παράδειγμα με τους κυνηγούς εναντίον λαγών ισχύει ότι

$$P(X \geq 75\%) \leq \frac{4}{3} \cdot (1 - \frac{1}{n})^n < 50\%$$

Τυχερά Παιχνίδια

Ορ. Έστω πιθανοτικός χώρος (p, Δ). Ένα τυχερό παιχνίδι είναι μια αντιστοιχία μιας σειράς γεγονότων $A_1, \ldots, A_n$ του χώρου σε στοιχήματα με απόδοση v_i προς 1 όπου $v_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, \ldots, n$.

Ο παίκτης διαλέγει ένα γεγονός, π.χ. το A_i και ποντάρει x ευρώ. Σε περίπτωση που το γεγονός A_1 συμβεί ο παίκτης παίρνει $x + v_i \cdot x$ ευρώ. Αλλιώς χάνει x ευρώ.

Π.χ. Στην ρουλέτα μπορείτε να ποντάρετε 20 ευρώ στο γεγονός '**straight up**' για το νούμερο 7 που έχει απόδοση 35 προς 1. Εαν έρθει 7 θα πάρετε 720 ευρώ — με οτιδήποτε άλλο αποτέλεσμα χάνετε 20 ευρώ.

Το κέρδος σαν τυχαία μεταβλητή

Ορ. Έστω τυχερό παιχνίδι. Το κέρδος ενός παίκτη για ένα στοίχημα που επιλέγει είναι η τ.μ. που αντιστοιχεί τα στοιχειώδη γεγονότα του δειγματικού χώρου του παιχνιδιού στις διαφορές που επιφέρουν στο πορτοφόλι του παίκτη.

Π.χ. Στο στοίχημα '**straight up**' στο νούμερο 7 της ρουλέτας για λ ευρώ το κέρδος ορίζεται ώς $K(7) = 35 \cdot \lambda$ ενώ $K(x) = -\lambda$ για $x \neq 7$.
Αν A είναι το γεγονός ότι έρχεται 7 τότε:

$$E[K] = p(A) \cdot 35 \cdot \lambda - (1 - p(A)) \cdot \lambda = \lambda \cdot (\frac{35}{37} - 1 + \frac{1}{37}) = \frac{-\lambda}{37}$$

$-1/37 = -2.70\%$ (ποσοστό κέρδους του καζίνο στο στοίχημα)

Μέσο Κέρδος

Πιο γενικά:
Το μέσο κέρδος ανα χρηματική μονάδα για ένα στοίχημα σε τυχερό παιχνίδι είναι η τιμή

$$E[K] = E[Xv - (1 - X)] = E[X \cdot (v + 1) - 1] = (v + 1) \cdot p(A) - 1$$

όπου X η ενδεικτική τ.μ. του γεγονότος A του στοιχήματος που έχει απόδοση v προς 1.

Π.χ. Ένα συνηθισμένο στοίχημα στη ρουλέτα είναι 'μαύρα η κόκκινα' που έχει απόδοση 1 προς 1. Να υπολογίσετε το μέσο κέρδος.

Ένα στοίχημα λέγεται τίμιο άν ισχύει ότι $E[K] = 0$.