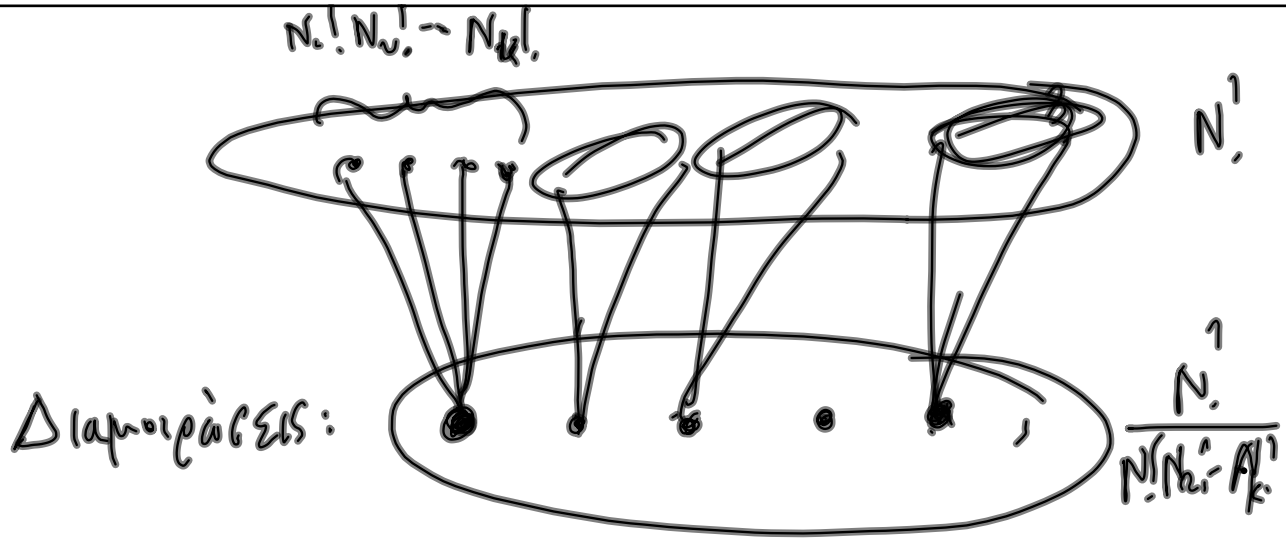
Έχουμε N δώρα να μοιράσουμε σε K παιδιά.
Εάν το i-οστο παιδί πάρει N_i δώρα $(i=1,\dots,K)$
με πόσους τρόπους μπορούμε να τα μοιράσουμε;

Τοποθετούμε τα δώρα σε σειρά. Το 1ο παιδί παίρνει τα πρώτα N_1 δώρα, το δεύτερο τα επόμενα N_2 δώρα κ.ο.κ.

Υπάρχουν $N!$ διαφορετικές διατάξεις των δώρων.

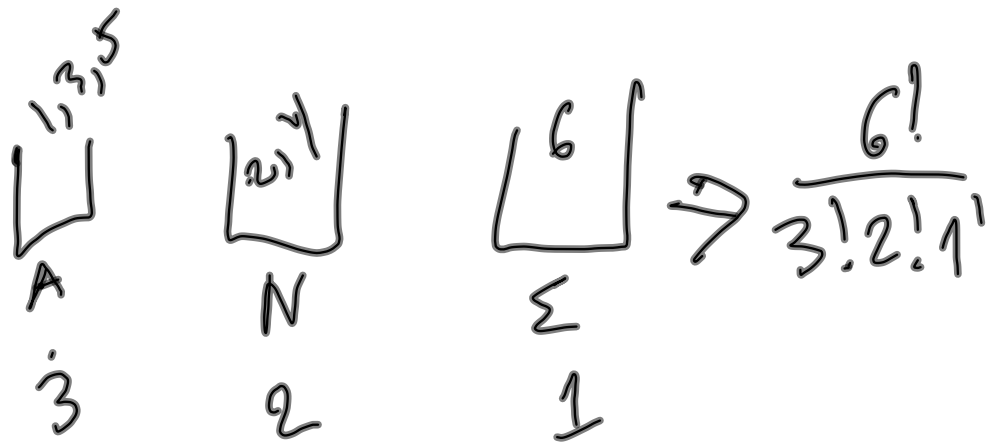
Όμως κάθε διαμοίραση οδηγεί σε $N_1!N_2!\cdots N_K!$ διαφορετικές σειρές για τα δώρα.

Άρα υπάρχουν $N! / N_1!N_2!\cdots N_K!$:


$N_1!\,N_2!\cdots N_k!$
$N!$
Διαμοιράσεις:
$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\cdots N_k!}$

Πόσοι .οι αναγραματισμοί της λέξης ΑΝΑΝΑΣ;

ΑΑΑΝΣΝ, ΝΑΝΑΣΑ ---



$$\Rightarrow \frac{6!}{3!\,2!\,1!}$$

Πόσες ακολουθίες γραμμάτων έχουν τον ίδιο αριθμό αναγραμματισμών με την λέξη ΑΝΑΝΑΣ αν έχουν μήκος 6.

Πρέπει να μετρήσουμε, ~~κατόπιν~~, πόσες "λέξεις" υπάρχουν με 3 ίδια, 2 ίδια και 1 γράμμα.

$$\binom{24}{3} 3 \cdot 2 \cdot \frac{6!}{3!2!} = 24 \cdot 23 \cdot 22 \frac{6!}{3!2!}$$

Επιλέγω 3 γράμματα.

Ποιο εμφανίζεται ×3 + ×2.

Καραμέλες 8 διαφορετικών χρωμάτων είναι σε 6 βάζα και έχουμε 20 από κάθε χρώμα.

Να δείξετε ότι σε κάποιο βάζο υπάρχουν 2 ζευγάρια από 2 διαφορετικά χρώματα.

Για κάθε χρώμα υπάρχει βάζο που περιέχει ζευγάρι από αυτό το χρώμα. Αφού έχουμε περισσότερα από 6 χρώματα θα υπάρχει βάζο με δύο ζευγάρια.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε N ευρώ σε K παιδιά, ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 1 ευρώ;

€ € € € € € 6 ευρώ

1ο παιδί 2ο 3ο 3 παιδιά

$$\binom{N-1}{K-1}$$

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε N αντικείμενα σε K κουτιά;
- Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_K = N;$$

- Πόσα πολυώνυμα με N στοιχεία μπορώ να φτιάξω από K διαφορετικά στοιχεία;

$$\binom{N+K-1}{K-1} = \binom{N+K-1}{N}$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από N αγόρια και N κορίτσια ομάδα ατόμων με 1 αγόρι περισσότερο;

- Επιλέγουμε 1 αγόρι και 0 κοριτσια: N
- 2 1 $\binom{N}{2}\cdot\binom{N}{1}$
- ⋮
- K K-1 $\binom{N}{K}\cdot\binom{N}{K-1}$

$$\sum_{K=1}^{N}\binom{N}{K}\binom{N}{K-1}=\binom{2N}{N+1}$$

Έστω ότι έχουμε στα N+1 που επιλέξαμε
A αγόρια και B κορίτσια.

$$A + B = N + 1 \Rightarrow$$

$$A = 1 + \underline{N - B}.$$

Άρα κρατάμε τα A αγόρια στα N+1 που διαλέξαμε
και τα N−B κορίτσια που <u>δεν</u> διαλέξαμε.

Άσκηση 15:

α). Είναι όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=20.$$

$$\binom{20+5-1}{20}$$

β). Είναι όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=11: \binom{11+5-1}{11}.$$

(θέτουμε $y_i=x_i+2$).

γ). Χωρίς περιορισμό οι λύσεις της $x_1+\dots+x_5=21$ είναι $\binom{21+5-1}{21}=\binom{25}{21}$.

Πρέπει να αφαιρέσουμε λύσεις με $x_1 \geq 11$.

Δηλαδή τις λύσεις της εξίσωσης

$$y_1+\dots+y_5=10 : \binom{10+5-1}{10}$$

Τελικά $\binom{25}{21}-\binom{14}{10}$.

δ). Όλες οι λύσεις με $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 15$ είναι όσες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5 : \binom{5+5-1}{5}$$

Πρέπει να αφαιρέσουμε λύσεις με $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 15$ είναι όσες οι λύσεις της

$$y_1 + y_2 + \dots + y_5 = 1 : \binom{1+5-1}{1}$$

και να αφαιρέσουμε λύσεις με $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 15$ και αυτές είναι 5.

Απ.: $\binom{9}{5} - 5 - 5 = \dots$