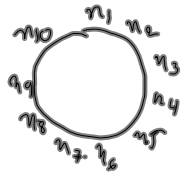
Άσκηση 72



- $\alpha_1 = n_1 + n_2 + n_3$
  $\alpha_2 = n_2 + n_3 + n_4$
  $\alpha_3 = n_3 + n_4 + n_5$
  $\vdots$
  $\alpha_9 = n_9 + n_{10} + n_1$
  $\alpha_{10} = n_{10} + n_1 + n_2$
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{10} = 3(n_1 + n_2 + \dots + n_{10}) = 3(1+2+\dots+10) = 165$.
- (71) $\exists k,\ \alpha_k \geq 165/10 = 16.5$.

Ιαν 20-11:17 πμ

Διατεταγμένη συλλογή

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$(1,2) \neq (2,1)$

$(1,2,2,3) \neq (1,2,3,2)$

Καρτεσιανό γινόμενο:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Ιαν 20-11:35 πμ

$A \times B = B \times A$;

Ισχύει μόνο όταν
1) $A = B$ ή 2) $A = \emptyset$ ή 3) $B = \emptyset$.

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Για $A_1, A_2, \dots, A_n$,

$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$.

Ιαν 20-11:40 πμ

Εάν $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ γράφουμε

$A_1 \times \dots \times A_n = A^n$.

Το σύνολο των bitstrings μήκους n γράφεται: $\{0,1\}^n$.

Ιαν 20-11:44 πμ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΕΝΩΣΗ: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

ΤΟΜΗ: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Εάν $A \cap B = \emptyset$, τα A, B λέγονται <u>ξένα</u> μεταξύ τους.

Ιαν 20-11:48 πμ

Άσκηση: Οι 50 μαθητές μιας τάξης διαχωρίζονται σε τουλάχιστον σε ένα από σκάκι και τάβλι. Εάν έπαιζαν σκάκι 30 και τάβλι 40, πόσοι;

Έπαιζαν μόνο σκάκι;

$A = \{$ όσοι έπαιζαν σκάκι $\}$

$B = \{$ τάβλι $\}$.

$A \cup B = \{$ όλοι οι μαθητές $\}$.

$A \cap B = \{$ όσοι έπαιζαν και τα 2 $\}$

Ιαν 20-11:51 πμ

Η φορά εγκλεισμός-αποκλεισμός δίνει

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 20.$$

Μόνο σκέτη τομή δίνει $|A - (A \cap B)| = 30 - 20 = 10$

Γενικευση.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ιαν 20-11:56 πμ

Διαφορά: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$$\{1,2,3\} - \{2,5\} = \{1,3\}$$

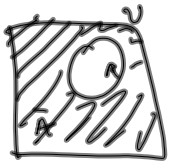
Συμπληρώμα ως προς ένα γενικό σύνολο U:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

π.χ. $U = \mathbb{Z}$, $A = \{x \mid x \text{ ακέραιος} \wedge x \leq 10\}$.

Τότε $\overline{A} = \{x \mid x \text{ ακέραιος} \wedge x > 10\}$

Ιαν 20-12:18 μμ



Ιαν 20-12:26 μμ

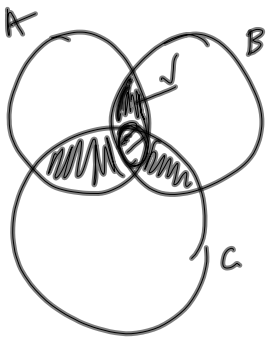
Κανόνες απορρόφησης:

$$\underset{B}{A} \cup (A \cap B) = \underset{B}{A}$$

$$A \cap B \subseteq A$$

Για κάθε $\Gamma \subseteq A$, $A \cup \Gamma = A$

Ιαν 20-12:24 μμ



Ιαν 20-12:00 μμ

Αν $X \subseteq Y$, τότε $X \cap Y = X$

$X = A$

$Y = A \cup B$

Ισχύει $A \subseteq A \cup B$ άρα $A \cap (A \cup B) = A$.

Ιαν 20-11:50 πμ

Για να δείξουμε $A=B$

- Πρέπει να δείξουμε $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$.

Πχ. για το $A\subseteq B$; παίρνουμε αυθαίρετο στοιχείο $x\in A$ και δείχνουμε ότι $x\in B$.

Ιαν 20-12:34 μμ

Πχ. $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$.

($\overline{A\cap B}\subseteq \bar{A}\cup\bar{B}$). Έστω $x\in \overline{A\cap B}$.

Άρα $x\notin A\cap B$ (ορισμός συμπληρώματος).

Άρα $\neg(x\in A \wedge x\in B)$. (ορ. τομής).

De Morgan δίνει $x\notin A \vee x\notin B$. $\boxed{\neg(p\wedge q) = (\neg p)\vee(\neg q)}$.

Από ορισμό συμπληρώματος: $x\in\bar{A} \vee x\in\bar{B}$.

Άρα από ορισμό ένωσης $x\in \bar{A}\cup\bar{B}$.

Ιαν 20-12:36 μμ

Έστω $A=\{x \mid P(x)\}$

$B=\{x \mid Q(x)\}$

Τότε

$A=B$ εάν $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$.

Στο παρ. $\overline{A\cap B} := \bar{A}\cup\bar{B}$

$P(x) = x\notin A\cap B$

$Q(x) = x\in \bar{A}\cup B$

Ιαν 20-12:44 μμ

Ένωση και τομή η οικογ.

Έστω τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$$
$$= \{x \mid x\in A_1 \vee x\in A_2 \vee \dots \vee x\in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n$$
$$= \{x \mid x\in A_1 \wedge x\in A_2 \wedge \dots \wedge x\in A_n\}$$

Ιαν 20-12:53 μμ

$A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$

$:= \{x \mid x \text{ ακέραιος και } x\geq i\}$.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1$ $\boxed{A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\dots}$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n$

Ιαν 20-12:56 μμ

$U=\{1,2,3,4,\dots,10\}$.

$A=\{1,3,4,10\}$

Αναπαράσταση του A: 1011000001

$\boxed{|P(A)| = 2^{|A|}}$ $|P(U)| = 2^{10}$

Ιαν 20-1:20 μμ

- Είναι το $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, \alpha\}\}$
- Πάντα $A \in P(A)$. και είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του $P(A)$.

$$P(\{\emptyset, \alpha\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\alpha\}, \{\emptyset, a\}\}$$

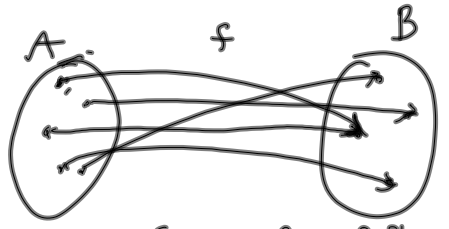
Ιαν 20-1:26 μμ

$$U = \{\underset{1}{a}, \underset{2}{c}, \underset{3}{10}, \underset{4}{12}, \underset{5}{-8}\}$$

$$0\,1\,1\,0\,0$$
$$\parallel$$
$$\{c, 10\}.$$

Ιαν 20-1:32 μμ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



Πεδίο ορισμού $\quad f: A \to B \quad$ Πεδίο τιμών

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Ιαν 20-1:33 μμ

Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$.
και για $x \in A$: $y = f(x)$.
Τότε: το y είναι η εικόνα του x.
x προ-εικόνα y
Εάν $S \subseteq A$ η εικόνα του S μέσω του f είναι το υποσύνολο του B

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

Ιαν 20-1:38 μμ

Ένα-προς-ένα:

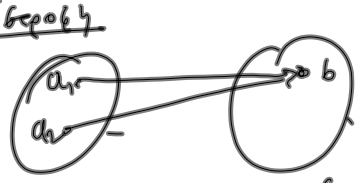
$$(\forall x \forall y)(x \neq y \longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

$$(\forall x \forall y)(f(x) = f(y) \longrightarrow x = y)$$

Επί: $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$

Ιαν 20-1:42 μμ

Αντίστροφη



$f^{-1}(b)$

$f^{-1}: B \to A \qquad f: A \to B$

$b = f(a) \longrightarrow f^{-1}(b) = a \qquad f': A \to f(A)$

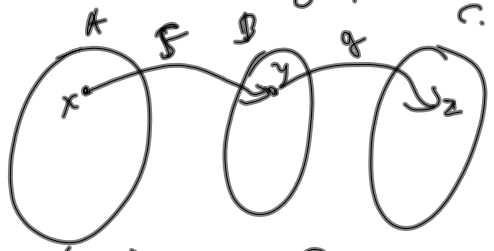
$f^{-1}(f(x)) = x.$

Ιαν 20-1:46 μμ

ΣΥΝΘΕΣΗ

$f: A \to B$

$g: B \to C$.



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Ιαν 20-1:51 μμ

Συναρτήσεις Δαπέδου και Οροφής

$\lfloor x \rfloor =$ ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$

$\lceil x \rceil =$ ο μικρότερος ακέραιος $\geq x$

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{ακέραιος} \\ 1 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ιαν 20-1:52 μμ

$$\lfloor \lfloor x \rfloor + x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor.$$

Ιαν 20-1:57 μμ